# **Контрольная работа №3.**

# **Функции в линейных пространствах. Приложение линейной алгебры к задачам аналитической геометрии.**

## **Требования к оформлению работы**

1. Работа выполняется в рукописном виде.
2. Должны быть указаны:
   1. номер контрольной работы, название работы и номер варианта;
   2. фамилия, имя, отчество полностью;
   3. название группы.
3. Выполняется только свой вариант, определяемый по общим правилам. Решение не своего варианта не проверяется.
4. Решить необходимо **все** задачи.
5. Не проверяются работы, являющиеся копиями уже проверенных работ.
6. Записав **условие задачи, ниже приведите её полное решение**, не опуская промежуточных вычислений, с полным теоретическим обоснованием.

**Вариант 3.1**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (4x1 − 5x2 + 2x3, 5x1 − 7x2 + 3x3, 6x1 − 9x2 + 4x3).

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 1, 1) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точки M1(−1, 2) и M2(−3, −2). Найдите значения параметров k и b для этой прямой.

**3.** Две стороны квадрата лежат на прямых 5x − 12y − 65 = 0 и   
5x − 12y + 26 = 0. Вычислите его площадь.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки P(−3, 2, 5) на плоскости

4x + y − 3z + 13 = 0 и x − 2y + z − 11 = 0.

**5.** Найдите длину отрезка прямой, параллельной вектору l = (0, 3, 4), между точками пересечения её с плоскостями 2x + y − z − 6 = 0 и   
2x + y − z − 4 = 0.

**Вариант 3.2**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (4x1 − 2x2 + 2x3, 2x2 + 2x3, x2 + x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(2, 2, 1) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку M0(2, −3) параллельно вектору AB, если A(4, 5), B(3, −7).

**3**. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями   
AB: 4x − y − 7 = 0;   
BC: x + 3y − 31 = 0;   
AC: x + 5y − 7 = 0.

Запишите общее уравнение высоты AH.

**4**. Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки   
M1(3, 0, 4) и M2(1, 1, 0) перпендикулярно плоскости 2x+ +y + 4z − 7 = 0.

**5.** Найдите расстояние от точки P(2, 4, 4) до прямой

(2x - y + z - 2 = 0

x + y - z - 1 = 0)

**Вариант 3.3**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (4x1 + 5x2 − 7x3, −2x2 + 4x3, 3x2 + 2x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 0, 0) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку M(−2, 4) перпендикулярно прямой x + 2y + 5 = 0.

Найдите площадь треугольника, образованного данной прямой с осями координат.

**3.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку M(−2, 2) и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью S = 4,5 кв. ед.

**4.** Даны вершины треугольника A(2, 1, 0), B(3, −1, 1) и C(1, 2, −4).

Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через сторону AB перпендикулярно плоскости треугольника ABC.

**5.** Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, которая проходит через точку A(1, 1, 6) перпендикулярно вектору AB, где B — точка пересечения медиан треугольника, вершины которого совпадают с точками пересечения осей координат с плоскостью 12x + 6y + z − 24 = 0.

**Вариант 3.4**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (2x1 + 3x3, 10x1 − 3x2 − 6x3, −x1 − 2x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 8, −1) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Составьте общее уравнение прямой, если точка P (2, 5) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

**3.** Запишите общее уравнение прямой, параллельной прямой   
4x + 2y + 5 = 0 и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью 9 кв. ед.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку   
M (4, −1, 3) параллельно оси OX и перпендикулярной к плоскости   
x − 3y + 4z − 5 = 0.

**5.** Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, содержащей прямую (x - 1)/1=(y + 1)/3=(z + 8)/4 и параллельной вектору a = (1, 0, 2).

**Вариант 3.5**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (−x1 + 2x2 + x3, 5x2, 3x1 + 2x2 + x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 0, 3) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку M(1, 4) параллельно прямой 2x + 3y + 5 = 0.

**3.** Найдите координаты проекции точки M(3, 6) на прямую   
x + 2y − 10 = 0.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M1(−6, 1, −5), M2(7, −2, −1), M3(10, −7, 1).

**5.** Известно, что прямая L параллельна вектору l = (0, 6, 8).

Найдите длину отрезка этой прямой между плоскостями   
x + y + z − 3 = 0 и x + y + z − 24 = 0,

**Вариант 3.6**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (3x1, −x1 + x3, 2x1 − 4x2 + 4x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 3, 10) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку M(2, 4) перпендикулярно прямой 3x + 4y + 5 = 0.

**3.** Составьте уравнения прямых, проходящих через точку P(3, 5) на одинаковых расстояниях от точек A(−7, 3) и B(11, −15).

В ответ ввести уравнение той прямой, которая отсекает от осей координат треугольник, расположенный в первой четверти.

**4.** Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точки   
M1(4, 2, 1) и M2(3, 3, 2) параллельно вектору AB = (4, −3, −2).

**5.** Найдите координаты проекции начала координат на прямую

(x - 5)/4=(y- 1)/3=(z + 3)/(-2)

**Вариант 3.7**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (4x1 − 2x2 + 2x3, −5x1 + 7x2 − 5x3, 3x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(1, 1, 0) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Даны координаты вершин треугольника A(1, 3), B(2, 8), C(6, 6).

Запишите общее уравнение прямой, на которой расположена медиана AM треугольника ABC.

**3.** Найдите координаты точки B, симметричной точке A(3, 2) относительно прямой x + 2y − 2 = 0.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку   
M(2, −1, 1) перпендикулярно двум плоскостям:   
x − 2y+ +3z − 2 = 0 и x + 4y − 2z + 1 = 0.

**5.** Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси абсцисс плоскостью, проходящей через прямую

x - y + 3z + 1 = 0

2x - z + 2 = 0

и точку M(1, 1, 0).

**Вариант 3.8**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (4x1, 2x1 + 2x3, −x1 + x2 + x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(0, 2, −1) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Даны координаты вершин треугольника A(1, 3), B(2, 8), C(6, 7).

Запишите общее уравнение его высоты AH.

**3.** В треугольнике ABC из вершины A проведены высота и медиана. Даны: вершина B(6, 5), уравнение высоты x + y = 2 и уравнение медианы   
2x − 3y + 1 = 0.

Найдите координаты x0,y0 вершины C.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки   
M1(1, −2, 4) и M2(2, −1, 2) перпендикулярно плоскости x + 4y − 5z + 3 = 0.

**5.** Найдите координаты проекции точки M(3, −1, −3) на плоскость   
2x + y − 4z + 4 = 0.

**Вариант 3.9**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (3x1, 2x1 + x3, x1 + 2x2 + x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(0, 1, 2) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** Даны координаты вершин треугольника A(3, 4), B(−1, 2), C(2, −1).

Запишите общее уравнение средней линии треугольника, параллельной BC.

**3.** В прямоугольном треугольнике ABC известны: уравнение медианы 3x−4y + 8 = 0, проведённой из вершины A(0, 2) прямого угла, и вершина   
B(2, 1).

Найдите координаты (x0,y0) вершины C треугольника.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки   
M1(7, 2, −3) и M2(5, 6, −4) параллельно оси OY .

**5.** Найдите коэффициент B в уравнении плоскости x + By + CZ + D = 0, проходящей через точки P(1, −1, 1), O(0, 0, 0) параллельно прямой

x = 0

4y + 3z = 0

**Вариант 3.10**

**1.** Линейный оператор A действует в R3 → R3 по закону   
Ax = (−x1, 3x1 + 2x2 − 2x3, −2x1 + 3x2 − 3x3), где x(x1,x2,x3) — произвольный вектор из R3.

Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе.

Докажите, что вектор x(0, 2, 3) является собственным для матрицы A.

Найдите собственное число λ0, соответствующее вектору x.

Найдите другие собственные числа, отличные от λ0.

Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

**2.** В прямоугольном треугольнике даны: вершина острого угла A(7, −2) и уравнение 3x − 5y + 15 = 0 одного из катетов.

Запишите общее уравнение другого катета.

**3.** Высота, проведённая из вершины A(4, 4) треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке D(1, 1).

x + 2y + 1 = 0 — уравнение высоты, опущенной из вершины B.

Определите координаты x0,y0 вершины C.

**4.** Запишите общее уравнение плоскости, которая проходит через точку M0(1, 2, 3) и ось OY.

**5.** Найдите значение параметра m в уравнении прямой

x = 0

my + 18z = 0

если известно, что эта прямая параллельна плоскости x + 4y + 3z + 5 = 0