Лабораторная работа №5
Решение систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему из n алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Обозначим через A матрицу системы (1.1), т.е. матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из n неизвестных и через $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец правых частей, также состоящий из n элементов..

Принимая во внимание правило умножения матриц, можно систему линейных уравнений (1.1) записать в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$,

решение которого имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$. В этом случае говорят, что система решена матричным методом.

Для того, чтобы оценить степень отклонения полученного решения от точного, необходимо сравнить две величины: $X_и$ - истинное решение системы и $X_к$ - приближённое решение, полученное на компьютере. Тогда погрешность решения $E = X_и - X_к$, а невязка $R = B - A \cdot X_к$.

1.Матричный метод.

Алгоритм решения системы матричным методом можно представить в виде следующей последовательности вычислительных процедур:

1) найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A;

2) найти решение системы по формуле $X = A^{-1} \cdot B$

3) вычислить новый вектор свободных членов $B_к = A \cdot X_к$;

4) вычислить невязку $R = B – B_к$;

5) получить решение системы по формуле $dX_к = A^{-1} \cdot R$;

6) сравнить все компоненты вектора $dX_к$ по модулю с заданной погрешностью E: если все они меньше E, то закончить вычисления, иначе повторить вычисления с п.2, где $X_к = X_к + dX_к$.

Пример 1. Рассмотрим на конкретном примере реализацию матричного метода поиска решения системы уравнений средствами MS Excel.

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}7 \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76 \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72 \end{cases}$$

Решение.

1.1. Откроем новый рабочий лист, щелкнув на выбранном Вами ярлычке.

1.2. Отведем под матрицу *A* блок ячеек A3:D6. Внесем исходные данные: числа матрицы *A* в ячейки блока A3:D6. Для наглядности заключим его в черную рамку. Для этого выделим блок A3:D6, вызываем контекстное меню правой кнопкой мыши, в открывшемся диалоговом окне выбираем вкладку *Границы*, выберем в поле *Тип линии* самую толстую ширину линии. Подтвердим свое решение, щелкнув на кнопке ОК.

1.3. Выделим теперь блок A8:D11 под матрицу A^{-1} и также заключим его в черную рамку, проделав действия, аналогичные блоку матрицы *A*.

1.4. Далее выделим блоки ячеек под вектор-столбцы (обведя их черной рамкой): блок F8:F11 - под вектор *B*, внесем исходные данные: числа вектора свободных членов *B* , блок H8:H11 - под вектор $X_к$, получающийся в результате умножения $A^{-1} \cdot B$, блок H3:H6 - под вектор $B_к$, получающийся в результате умножения $A \cdot X_к$; причем для наглядности выделим дополнительный блок F3:F6, куда скопируем компоненты вектора $X_к$ из блока H8:H11.

1.5. Занесем в ячейки E4 и E9 знак умножения *, а в ячейки G4 и G9 знак равенства =. Таким образом мы подготовили рабочий лист к решению нашей задачи.

1.6. Найдём матрицу, обратную матрице *A*. Для этого выделим блок A8:D11, куда должен быть помещен результат операции. Этот блок окрасится в черный цвет, за исключением ячейки A8. Щелкнем по кнопке f_x на панели *Стандартная*, осуществив вызов *Мастера Функций*. Откроется диалоговое окно, в котором из поля *Категория* выберем строку *Математические.* а из поля *Выберите функцию* - строку МОБР. Перейдем ко второму шагу диалога, щелкнув по кнопке *Ок.* Затем в поле *Массив* заносим данные из A3:D6, выделяя их левой кнопкой мыши, что соответствует блоку ячеек, занятому матрицей *A*. Щелкнув на кнопке *Ок*, можно увидеть, что в блоке A8:D11 заполнена лишь ячейка A8. Чтобы заполнить все ячейки, выделенные под обратную матрицу следует нажать на клавиатуре клавишу “Ctrl”, затем не отпуская ее - клавишу “Shift”, и не отпуская и ее - клавишу “Enter”, т.е. в результате должны быть нажаты все три клавиши одновременно! Вот теперь весь блок A8:D11 будет заполнен числами.

1.7. Далее найдём результат умножения $A^{-1} \cdot B$.Выделив блок H8:H11, снова вызовите *Мастер функций* и в поле *Выберите функцию* - выбирайте функцию МУМНОЖ. Щелкнув по кнопке *Ок* перейдем ко второму шагу диалога, где в поле *Массив1* внесем адрес A8:D11, а в поле *Массив2* - адрес F8:F11. По методике, описанной выше, нажмем одновременно три клавиши “Ctrl”-”Shift”-”Enter”. Результат умножения появится в блоке H8:H11, как показано на рис.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Решение системы линейных алгебраических уравнений								
2	Матрица А					Вектор Хс		Вектор Вс	
3	20,9	1,2	2,1	0,9	*	0,8	=	21,7	
4	1,2	21,2	1,5	2,5	*	1,0	=	27,46	
5	2,1	1,5	19	1,3	*	1,3	=	28,76	
6	0,9	2,5	1,3	32,1	*	1,4	=	49,72	
7	Матрица, обратная А					Вектор В		Вектор Хс	
8	0,04853355	-0,00227	-0,00512	-0,00098		21,7		0,8	
9	-0,0022699	0,047948	-0,00329	-0,00354		27,46		1,0	
10	-0,0051182	-0,00329	0,053578	-0,00177		28,76		1,3	
11	-0,0009767	-0,00354	-0,00177	0,031527		49,72		1,4	
12									
13	Определитель матрицы А=			261939					

Рисунок 1. Решение задачи матричным методом

1.8. Для проверки точности полученного решения системы, проведем операцию вычисления $B_к = A \cdot X_к$. С этой целью скопируем только числовые значения (а не формулы!) ячеек из блока H8:H11 в ячейки F3:F6. Сделать это надо следующим образом. Выделим блок H8:H11. Дадим команду меню *Главная –Копировать*. Выделим блок F3:F6. Дадим команду меню *Главная –Вставка –Специальная вставка*. Откроется диалоговое окно, в котором в поле *Вставить* следует выбрать переключатель *Значения*. А затем щелкнуть по кнопке *Ок*.

1.9. Итак, заполнены числами блоки A3:D6 и F3:F6. Можно приступить к умножению матрицы *A* на вектор $X_к$. Для этого надо выделить блок H3:H6, вызвать *Мастер Функций* и, действуя подобно описанному выше, получить $B_к$. Как видно из таблицы, числовые значения векторов *B* и $B_к$ совпадают, что говорит о хорошей точности вычислений, т.е. невязка в нашем примере равна нулю.

2.Метод приближенных вычислений.

Одним из наиболее распространенных итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, отличающийся простотой и легкостью программирования, является метод приближенных вычислений или ***метод Якоби.***

Рассмотрим систему из 4-х алгебраических уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \tag{1.2}$$

Предположим, что диагональные элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} отличны от нуля. В противном случае можно переставить уравнения в (1.2). Выразим переменные из первого, второго третьего и четвёртого уравнений соответственно. Тогда

$x_1 = [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)] / a_{11}$

$x_2 = [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)] / a_{22}$

$x_3 = [b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)] / a_{33}$

$x_4 = [b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)] / a_{44}$

Зададим начальные приближения неизвестных

$x_1 = x_1^{(0)}$

$x_2 = x_2^{(0)}$

$x_3 = x_3^{(0)}$

$x_4 = x_4^{(0)}$

Подставляя их в правую часть преобразованной системы, получим новое первое приближение

$x_1^{(1)} = [b_1\text{-}(\,a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)})+a_{14}x_4^{(0)})]/\,a_{11}$

$x_2^{(1)}= [b_2\text{-}(\,a_{21}x_1^{(0)}+a_{23}x_3^{(0)})+a_{24}x_4^{(0)})]/\,a_{22}$

$x_3^{(1)}= [b_3\text{-}(\,a_{31}x_1^{(0)}+\,a_{32}x_3^{(0)})+a_{34}x_4^{(0)})]/\,a_{33}$

$x_4^{(1)}= [b_4\text{-}(\,a_{41}x_1^{(0)}+\,a_{42}x_3^{(0)})+a_{43}x_4^{(0)})]/\,a_{44}$

На этом заканчивается первая итерация. Далее, используя вычисленные значения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ и $x_4^{(1)}$, можно провести следующую итерацию, чтобы найти $x_1^{(2)}$,$x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ и $x_4^{(2)}$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока на какой-либо k-той итерации все значения $x_i^{(k)}$ не станут близкими к $x_i^{(k-1)}$. Близость этих значений можно характеризовать максимальной абсолютной величиной их разности D. Тогда при заданной допустимой погрешности ε критерий окончания итерационного процесса можно записать так

$$D = \max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon \text{ , для } i=1,2,3,4.$$

Пример 2. Решим систему примера 1 методом Якоби.

Пусть рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}7 \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76 \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72 \end{cases}$$

Будем считать начальные приближения равными:

$x_1^{(0)}= b_1=21{,}7$

$x_2^{(0)}= b_2=27{,}46$

$x_3^{(0)}= b_3=28{,}76$

$x_4^{(0)}= b_4=49{,}72$,

а допустимая погрешность ε = 1E –5.

Очевидно, что достаточные условия сходимости метода выполняются.

Решение.

2.1. Откроем новый рабочий лист Excel.

2.2. Внеся в ячейку A1 текст с названием метода, отведем вторую строку для заголовков столбцов таблицы. Так, в ячейку A2 заносим №, в B2 – x_1, C2 – x_2, D2 – x_3, E2 – x_4, F2 - dx_1, G2 – dx_2, H2 – dx_3, I2 – dx_4 J2 – D.

2.3. Третья строка должна содержать информацию о нулевой итерации, т.е. в ячейку A3 занесем ноль, а в ячейки B3, C3, D3 и E3 – начальные приближения, равные значениям свободных членов уравнения.

2.4. Четвертая строка будет содержать формулы для вычисления первой итерации: A4 = 1, B4=(21,7 – (1,2*C3+2.1*D3+0.9*E3))/20.9,

C4=(27.46-(1.2*B3+1.5*D3+2.5*E3))/21.2,

D4=(28.76-(2.1*B3+1.5*C3+1.3*E3))/19.8,

E4=(49.72-(0.9*B3+2.5*C3+1.3*D3))/32.1,

F4=ABS(B4-B3),

G4=ABS(C4-C3),

H4=ABS(D4-D3),

I4=ABS(E4-E3),

J4=МАКС(F4:I4).

2.5. Для проведения остальных итераций следует скопировать формулы ячеек B4:J4 в нижние строки с 5 по, например, 15. Если числовые значения в столбце J будут меньше ε, решение найдено. В противном случае следует продолжить копирование. Результат решения показан на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1					Метод Якоби						
2	№	x1	x2	x3	x4	dx1	dx2	dx3	dx4	D	
3	0	21,7	27,46	28,76	49,72						
4	1	-5,56919	-7,83113	-6,19374	-2,36287	27,26919	35,29113	34,95374	52,08287	52,08287	
5	2	2,211999	2,327396	2,791602	2,565793	7,781186	10,15853	8,985339	4,928659	10,15853	
6	3	0,513663	0,669987	0,87314	1,192574	1,698337	1,657409	1,918462	1,373219	1,918462	
7	4	0,860723	1,063795	1,268989	1,446967	0,34706	0,393809	0,395849	0,254393	0,395849	
8	5	0,787383	0,986143	1,185643	1,390535	0,07334	0,077652	0,083346	0,056432	0,083346	
9	6	0,802646	1,002846	1,203009	1,402014	0,015263	0,016703	0,017366	0,011479	0,017366	
10	7	0,799447	0,9994	1,199372	1,399582	0,003198	0,003446	0,003638	0,002432	0,003638	
11	8	0,800116	1,000125	1,200132	1,400088	0,000668	0,000725	0,00076	0,000505	0,00076	
12	9	0,799976	0,999974	1,199973	1,399982	0,00014	0,000151	0,000159	0,000106	0,000159	
13	10	0,800005	1,000005	1,200006	1,400004	2,92E-05	3,17E-05	3,32E-05	2,21E-05	3,32E-05	
14	11	0,799999	0,999999	1,199999	1,399999	6,11E-06	6,62E-06	6,95E-06	4,63E-06	6,95E-06	
15											

Рисунок 2. Результат решения системы методом Якоби.

3. Метод Гаусса – Зайделя.

Данный метод является модификацией метода приближенных вычислений и отличается от него формулами вычислений первого и последующего приближений.

Рассмотрим систему из 4-х алгебраических уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

Необходимо найти решение этой системы. Предполагаем, что диагональные элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} отличны от нуля. Если это не так, то можно переставить уравнения. Выразим переменные из первого, второго, третьего и четвёртого уравнений соответственно. Тогда

$x_1 = [b_1\text{-}(a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)]/\,a_{11}$

$x_2 = [b_2\text{-}(a_{21}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4)]/\,a_{22}$

$x_3 = [b_3\text{-}(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{34}x_4)]/\,a_{33}$

$x_4 = [b_4\text{-}(a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3)]/\,a_{44}$

Зададим начальные приближения неизвестных

$x_1 = x_1^{(0)}$

$x_2 = x_2^{(0)}$

$x_3 = x_3^{(0)}$

$x_4 = x_4^{(0)}$

Подставляя их в правую часть преобразованной системы, получим новое первое приближение

$x_1^{(1)} = [b_1\text{-}(\ a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)})+a_{14}x_4^{(0)})]/\ a_{11}$
$x_2^{(1)}= [b_2\text{-}(\ a_{21}x_1^{(1)}+a_{23}x_3^{(0)})+a_{24}x_4^{(0)})]/\ a_{22}$
$x_3^{(1)}= [b_3\text{-}(\ a_{31}x_1^{(1)}+\ a_{32}x_3^{(1)})+a_{34}x_4^{(0)})]/\ a_{33}$
$x_4^{(1)}= [b_4\text{-}(\ a_{41}x_1^{(1)}+\ a_{42}x_3^{(1)})+a_{43}x_4^{(1)})]/\ a_{44}$

На этом заканчивается первая итерация. В отличии от метода Якоби, здесь использовались не только начальные приближения, но и уже вычисленные значения неизвестных на первой итерации. Далее, используя вычисленные значения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ и $x_4^{(1)}$, можно провести следующую итерацию, чтобы найти $x_1^{(2)}$,$x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ и $x_4^{(1)}$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока на какой-либо k-той итерации все значения $x_i^{(k)}$ не станут близкими к $x_i^{(k-1)}$. Близость этих значений можно характеризовать максимальной абсолютной величиной их разности D. Тогда при заданной допустимой погрешности ε критерий окончания итерационного процесса можно записать так

$$D = \max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon \text{ , для } i=1,2,3,4.$$

Доказано, что *<u>для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения были не меньше суммы модулей всех остальных коэффициентов</u>***:**

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\text{, для } i=1,2,3,4.$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго.

Пример 3.

Решим систему примера 1 методом Гаусса-Зайделя.

Решение.

3.1. Откроем новый рабочий лист Excel.

3.2. Строка заголовка таблицы и информация о нулевой итерации заполняются по аналогии с примером 2.

3.3. Изменятся лишь формулы в четвертой и последующих строках
A4 – 1, B4=(21,7 – (1,2*C3+2.1*D3+0.9*E3))/20.9,
C4=(27.46-(1.2*B4+1.5*D3+2.5*E3))/21.2,
D4=(28.76-(2.1*B4+1.5*C4+1.3*E3))/19.8,
E4=(49.72-(0.9*B4+2.5*C4+1.3*D4))/32.1,
F4=ABS(B4-B3),
G4=ABS(C4-C3),
H4=ABS(D4-D3),
I4=ABS(E4-E3),
J4=МАКС(F4:I4).

3.4. Для проведения остальных итераций следует скопировать формулы ячеек B4:J4 в нижние строки с 5 по, например, 15. Если числовые значения в столбце J будут меньше ε, решение найдено. В противном случае следует продолжить копирование. Результат решения показан на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Метод Гаусса-Зайделя										
2	№	x1	x2	x3	x4	dx1	dx2	dx3	dx4	D	
3	0	21,7	27,46	28,76	49,72						
4	1	-5,56919	-6,28759	-0,74492	2,224911	27,26919	33,74759	29,50492	47,49509	47,49509	
5	2	1,378326	1,007599	1,083926	1,387894	6,947513	7,295192	1,828841	0,837017	7,295192	
6	3	0,811748	1,008975	1,198869	1,399017	0,566578	0,001376	0,114943	0,011123	0,566578	
7	4	0,799641	1,000216	1,200086	1,39999	0,012107	0,008759	0,001217	0,000972	0,012107	
8	5	0,799979	0,999996	1,200003	1,400001	0,000339	0,00022	8,31E-05	1,1E-05	0,000339	
9	6	0,8	1	1,2	1,4	2,05E-05	3,42E-06	3,16E-06	7,14E-07	2,05E-05	
10	7	0,8	1	1,2	1,4	1,51E-07	2,99E-07	8,15E-09	2,79E-08	2,99E-07	
11											
12											

Рисунок 3. Результат решения системы методом Гаусса – Зайделя

Как видно, в данном случае метод Гаусса – Зайделя оказался быстрее метода приближенных вычислений.

Варианты индивидуальных заданий.

1. $$\begin{cases} 22{,}1x_1 + 1{,}23x_2 + 1{,}4x_3 + 3{,}6x_4 = 11{,}2 \\ 3{,}45x_1 - 25{,}6x_2 + 3{,}81x_3 + 4{,}91x_4 = -47{,}1 \\ 3{,}25x_1 - 6{,}28x_2 - 57{,}4x_3 - 2{,}95x_4 = 31{,}3 \\ 5{,}43x_1 + 3{,}55x_2 - 2{,}43x_3 + 69{,}1x_4 = 51{,}4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 21{,}6x_1 + 4{,}65x_2 + 3{,}73x_3 + 2{,}2x_4 = 92{,}3 \\ -1{,}3x_1 + 43{,}2x_2 + 5{,}26x_3 + 2{,}34x_4 = 0 \\ 3{,}78x_1 - 5{,}33x_2 - 38{,}5x_3 + 5{,}41x_4 = 12{,}9 \\ 9{,}54x_1 + 2{,}28x_2 - 4{,}32x_3 - 75{,}5x_4 = 39{,}9 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 63{,}9x_1 + 4{,}54x_2 + 2{,}43x_3 + 9{,}64x_4 = 69{,}8 \\ 3{,}48x_1 - 57{,}5x_2 + 6{,}69x_3 + 7{,}35x_4 = 36{,}5 \\ -2{,}93x_1 + 5{,}63x_2 - 16{,}7x_3 + 6{,}32x_4 = 11{,}9 \\ 6{,}4x_1 + 9{,}5x_2 + 7{,}3x_3 - 87{,}2x_4 = 74{,}3 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 34{,}5x_1 + 2{,}8x_2 - 4{,}6x_3 + 2{,}7x_4 = 32{,}4 \\ 1{,}5x_1 - 37{,}2x_2 + 5{,}4x_3 + 8{,}3x_4 = 48{,}6 \\ 3{,}4x_1 - 2{,}1x_2 - 39{,}9x_3 + 5{,}3x_4 = 38{,}7 \\ -2{,}6x_1 + 5{,}14x_2 + 2{,}13x_3 - 35{,}7x_4 = 54{,}8 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 27{,}3x_1 - 1{,}12x_2 + 2{,}47x_3 + 5{,}16x_4 = 68{,}3 \\ 4{,}11x_1 + 23{,}6x_2 + 5{,}6x_3 - 3{,}3x_4 = 53{,}1 \\ 6{,}3x_1 + 5{,}2x_2 + 36{,}1x_3 - 2{,}58x_4 = 25{,}4 \\ 3{,}62x_1 - 4{,}3x_2 + 7{,}3x_3 + 94{,}2x_4 = -11{,}8 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 21{,}5x_1 + 2{,}78x_2 - 3{,}11x_3 + 3{,}35x_4 = -28{,}8 \\ -3{,}14x_1 + 73{,}6x_2 + 6{,}5x_3 - 2{,}9x_4 = 13{,}2 \\ 2{,}47x_1 + 3{,}58x_2 + 46{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = -12{,}3 \\ 4{,}6x_1 - 5{,}9x_2 - 7{,}2x_3 + 26{,}3x_4 = 51{,}3 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 97{,}3x_1 + 1{,}13x_2 - 4{,}6x_3 + 6{,}2x_4 = 37{,}2 \\ 4{,}58x_1 + 24{,}5x_2 + 3{,}66x_3 - 8{,}11x_4 = 36{,}9 \\ 5{,}23x_1 + 5{,}56x_2 + 29{,}9x_3 + 1{,}22x_4 = 53{,}5 \\ -3{,}4x_1 + 5{,}1x_2 - 4{,}8x_3 + 61{,}7x_4 = 21{,}6 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} -211{,}3x_1 + 11{,}2x_2 + 21{,}2x_4 = 152{,}3 \\ 31{,}3x_1 - 456{,}2x_2 + 41{,}31x_3 = 425{,}3 \\ 51{,}9x_1 + 23{,}6x_2 - 418{,}9x_3 + 22{,}8x_4 = 319{,}5 \\ 11{,}3x_1 + 48{,}6x_3 + 219{,}5x_4 = 546{,}2 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 235{,}6x_1 + 11{,}5x_2 + 34{,}94x_3 + 32{,}6x_4 = 125{,}22 \\ 21{,}6x_1 - 211{,}8x_2 + 36{,}2x_3 + 17{,}85x_4 = 412{,}6 \\ 32{,}36x_1 - 55{,}6x_2 - 275{,}5x_3 - 21{,}3x_4 = 325{,}3 \\ 46{,}5x_1 + 37{,}3x_2 - 28{,}9x_3 + 682{,}9x_4 = 511{,}5 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 21{,}3x_1 - 4{,}7x_2 + 2{,}12x_3 + 8{,}6x_4 = 31{,}4 \\ 4{,}59x_1 + 21{,}5x_2 + 8{,}7x_3 - 3{,}46x_4 = 11{,}3 \\ 6{,}2x_1 + 7{,}2x_2 + 36{,}5x_3 - 2{,}6x_4 = 48{,}5 \\ 1{,}3x_1 - 4{,}5x_2 + 8{,}9x_3 + 62{,}7x_4 = 11{,}2 \end{cases}$$

11 $$\begin{cases} 11{,}5x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}6x_3 + 3{,}9x_4 = 21{,}5 \\ -3{,}1x_1 + 64{,}9x_2 + 5{,}2x_3 - 1{,}8x_4 = 18{,}6 \\ 2{,}3x_1 + 3{,}2x_2 + 48{,}2x_3 + 3{,}2x_4 = 11{,}1 \\ 2{,}6x_1 - 5{,}3x_2 - 2{,}11x_3 + 74{,}3x_4 = 31{,}8 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} 11{,}3x_1 + 6{,}3x_2 - 1{,}3x_3 + 6{,}1x_4 = 20{,}6 \\ 3{,}5x_1 + 28{,}2x_2 + 1{,}7x_3 - 1{,}1x_4 = 36{,}2 \\ 5{,}2x_1 + 5{,}8x_2 + 27{,}1x_3 + 8{,}3x_4 = 15{,}2 \\ 2{,}3x_1 + 6{,}1x_2 - 4{,}3x_3 + 36{,}8x_4 = 11{,}9 \end{cases}$$